ツェラーの公式についての考察

Study of Zeller’s congruence

板垣 雄大　　坪田 大成

Itagaki Yudai　Tubota Taisei

Abstract

We proved Zeller’s congruence and studied its composition. Zeller’s congruence is a formula with which we can calculate the day of the week by substituting a certain date. We tried converting a part of this formula and succeeded. However, it has a difficult point to deal with. We have improved that point and made a new version of Zeller’s congruence.

要約

私たちはツェラーの公式について証明し、式の構成について研究した。ツェラーの公式とは年、月、日を代入することで、その日付の曜日を求めることができる式である。私たちはこの式の一部の変換を試み、成功した。また、この公式には使いづらい点が存在する。私たちはその点を改善し、新しくツェラーの公式(改)を作った。

研究動機

映画「サマーウォーズ」に次のような場面がある。ある人の生年月日を聞いただけで瞬時にその日が何曜日か当てる、というものだ。調べたところ、これは「ツェラーの公式」というものを使って算出したということがわかった。私たちはこの「ツェラーの公式」に深く興味を持ち、課題研究として詳しく調べ、研究することにした。

ツェラーの公式は以下の式で表される。

西暦y年m月d日の曜日を求めるとする。

$h \equiv \left(y+\left[\frac{y}{4}\right]-\left[\frac{y}{100}\right]+\left[\frac{y}{400}\right]+\left[\frac{13m+8}{5}\right]+d\right) mod\ 7$ ⋯①

曜日：h

$$\begin{pmatrix} 0:\text{日曜}\ 1:\text{月曜}\ 2:\text{火曜} \\ 3:\text{水曜}\ 4:\text{木曜}\ 5:\text{金曜}\ 6:\text{土曜} \end{pmatrix}$$

ただし、$m=1,2$のとき

西暦$(y-1)$年$(m+12)$月d日として代入。

例

西暦2020年7月24日(東京オリンピックの開会式)の曜日を求める場合

$$h \equiv \begin{pmatrix} 2020+\left[\frac{2020}{4}\right]-\left[\frac{2020}{100}\right]+\left[\frac{2020}{400}\right] \\ +\left[\frac{13\times 7+8}{5}\right]+24 \end{pmatrix} mod\ 7$$

$\equiv (2020+505-20+5+19+24) mod\ 7$

$\equiv 2553 mod\ 7$

$\equiv 5 mod\ 7$

∴西暦2020年7月24日は金曜日である。

ただし、ツェラーの公式は①以外にも形の違うものが存在する。このことが以下の考察や研究のきっかけともなった。

ツェラーの公式の証明

文献を参考に以下の方針で証明した。

西暦0年3月1日～西暦y年m月d日の日数を

(a)西暦0年3月1日～y年3月1日、

(b)西暦y年3月1日～y年m月1日、

(c)西暦y年m月1日～y年m月d日

の3つに分け、各期間の日数の和を求める。

その和を7で割った余りにより分類する。

(a)西暦0年3月1日～y年3月1日の日数

グレゴリオ暦において、1年は365日であり、閏年は4の倍数の年にあり、100の倍数の年にな

く、400 の倍数の年にあるため、日数は

$$365y+\left[\frac{y}{4}\right]-\left[\frac{y}{100}\right]+\left[\frac{y}{400}\right]$$

と表せる。

(b) 西暦 y年 3 月 1 日～ y年 m月 1 日の日数

1 年を 3 月～14(= 2) 月として考える。その理由は、かつて 3 月が 1 年の始まりであり、閏日は 1 年の終わり 14(= 2) 月の最後に入れていたためと、この方が閏日の処理が簡単なためである。

このとき、それぞれの月の日数は

3月	30+1日	4月	30日	5月	30+1日
6月	30日	7月	30+1日	8月	30+1日
9月	30日	10月	30+1日	11月	30日
12月	30+1日	13月	30+1日	14月	28日

となるため、3 月 1 日～ m月 1 日の日数は

m=3	30×0+0	m=4	30×1+1	m=5	30×2+1
m=6	30×3+2	m=7	30×4+2	m=8	30×5+3
m=9	30×6+4	m=10	30×7+4	m=11	30×8+5
m=12	30×9+5	m=13	30×10+6	m=14	30×11+7

つまり、日数は

$$30(m-3)+n\ \ (0\leq n\leq 7)$$

と表せる。よって $m-3=x$ とすると

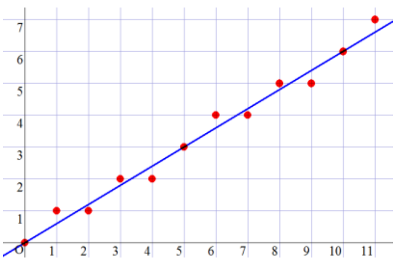
$$(x,n)=(0,0),(1,1),(2,1),(3,2),(4,2),(5,3),$$
$$(6,4),(7,4),(8,5),(9,5),(10,6),(11,7)$$

を通る関数を考えれば良い。

一見不規則に見えるが、

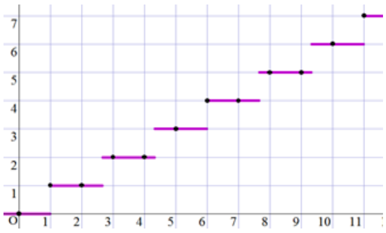
$(x,n)=(0,0),(5,3),(10,6)$ を通ることに注目し、

$n=\frac{3}{5}x$ を用いる。



さらに $\frac{2}{5}$ を足してガウス記号を使うことによって、すべての点を通ることができた。

つまり $n=\left[\frac{3x+2}{5}\right]$ となる。さらに $x=m-3$ より、$n=\left[\frac{3m-7}{5}\right]$ と表せる。



よって、日数は $30(m-3)+\left[\frac{3m-7}{5}\right]$ となる。

(c) 西暦 y年 m月 1 日～ y年 m月 d日の日数

この期間の日数は $d-1$

(a)～(c) より西暦 0 年 3 月 1 日～ y年 m月 d日の日数を 7 で割った余りは以下のようになる。

$$h\equiv\left(\begin{array}{c}365y+\left[\frac{y}{4}\right]-\left[\frac{y}{100}\right]+\left[\frac{y}{400}\right]\\+30(m-3)+\left[\frac{3m-7}{5}\right]+(d-1)\end{array}\right) mod\ 7$$

$$\equiv\left(y+\left[\frac{y}{4}\right]-\left[\frac{y}{100}\right]+\left[\frac{y}{400}\right]+\left[\frac{13m-7}{5}\right]+d\right) mod\ 7\cdots②$$

これに実際に日付を代入する。

②に 1582 年 10 月 15 日を代入して、

$$h\equiv\left(\begin{array}{c}1582+\left[\frac{1582}{4}\right]-\left[\frac{1582}{100}\right]+\left[\frac{1582}{400}\right]\\+\left[\frac{13\times 10-7}{5}\right]+15\end{array}\right) mod\ 7$$

$$\equiv(1582+395-15+3+24+15) mod\ 7$$

$$\equiv 2 mod\ 7$$

この日はグレゴリオ暦が使われ始めた最初の日で金曜日なので、$h\equiv 2$ のとき金曜日である。(つまり、$h\equiv 0$ のとき水曜日となる。)よって②の右辺に 3 を足して $h\equiv 5$ のとき金曜日、$h\equiv 0$のとき日曜日になるようにする。

以上より、

$$h\equiv\left(y+\left[\frac{y}{4}\right]-\left[\frac{y}{100}\right]+\left[\frac{y}{400}\right]+\left[\frac{13m+8}{5}\right]+d\right) mod\ 7$$

月の計算

私たちは上記の月の計算部分で作った関数

$\mathrm{n}=\left[\frac{3x+2}{5}\right]$ は試行錯誤の末にできていることに気づいた。例えば、12 個の点を通るためには

$n = \left[\frac{3}{5}x + t\right]$ $\left(\frac{2}{5} \leq t < \frac{3}{5}\right)$ であれば良い。

そこでこの部分は他の関数で代用可能かと考えた。まず初めに、

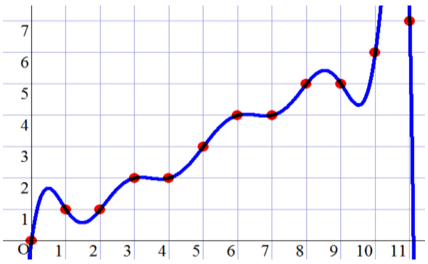
$(x, n) = (0,0), (1,1), (2,1), (3,2), (4,3),$
$(5,3), (6,4), (7,4), (8,5), (9,5), (10,6), (11,7)$

を通る 11 次関数を作れないかと考えた。

関数 $y = ax^{11} + bx^{10} + cx^9 + dx^8 + ex^7 + fx^6 + gx^5 + hx^4 + ix^3 + jx^2 + kx + l$

に (x, n) をそれぞれ代入して 12 元連立方程式を作り、これを Mathematica を用いて解いたところ、次の関数が得られた。

$$y = -\frac{5}{1596672}x^{11} + \frac{25}{145152}x^{10} - \frac{293}{72576}x^9 + \frac{635}{12096}x^8 - \frac{6647}{16128}x^7 + \frac{13705}{6912}x^6 - \frac{63349}{11340}x^5 + \frac{562015}{72576}x^4 - \frac{13351}{18144}x^3 - \frac{2185}{224}x^2 + \frac{214507}{27720}x$$



よって、$n = \left[\frac{3x+2}{5}\right]$ は上記の式で代用可能である。

ツェラーの公式の使いづらい点と解決策

上記したツェラーの公式には使いづらい点がある。それは $m = 1,2$ のときに、

西暦 $(y-1)$年 $(m+12)$月 d日

として代入しなくてはならない点である。

例えば、2017 年 1 月 1 日の曜日を求めたいときは、2016 年 13 月 1 日として代入しなくてはならない。そこで私たちは、この変換を行わない式を作ることにした。また、これをツェラーの公式(改)と称する。

ツェラーの公式(改)について

私たちは下記のツェラーの公式(改)を導き出した。

西暦 y年 m月 d日の曜日を求めるとする。

$$h \equiv \left(\begin{array}{c} 365y + \left[\frac{y-1}{4}\right] - \left[\frac{y-1}{100}\right] + \left[\frac{y-1}{400}\right] \\ +\{31(m-1) + d - 1\}\left[\frac{12-m}{10}\right] \\ +\left\{30(m-3) + \left[\frac{3m-7}{5}\right] + 59 + d - 1\right\}\left[\frac{m+7}{10}\right] \\ + \left[\frac{\left[\frac{1}{(y \bmod 4)+1}\right] - \left[\frac{1}{(y \bmod 100)+1}\right] + \left[\frac{1}{(y \bmod 400)+1}\right] + \left[\frac{m+7}{10}\right]}{2}\right] \end{array} \right) mod\ 7$$

※曜日の設定はツェラーの公式と同じ

ツェラーの公式(改)の説明

ツェラーの公式(改)を次の 4 つの部分に分け、それぞれ証明する。

(A) $365y + \left[\frac{y-1}{4}\right] - \left[\frac{y-1}{100}\right] + \left[\frac{y-1}{400}\right]$ について

この式は 0 年 1 月 1 日～ y年 1 月 1 日の日数を求めている。グレゴリオ暦において、1 年は 365 日であり、また、閏年は 4 の倍数の年にあり、100 の倍数の年になく、400 の倍数の年にある。

よって、$365s + \left[\frac{t}{4}\right] - \left[\frac{t}{100}\right] + \left[\frac{t}{400}\right]$ と表せる。ただし、y年が閏年か否かの判別は後述の(D)の式で行うので、上記の s には y、t には $y-1$ を代入する。

よって、$365y + \left[\frac{y-1}{4}\right] - \left[\frac{y-1}{100}\right] + \left[\frac{y-1}{400}\right]$ となる。

(B) $\{31(m-1) + d - 1\}\left[\frac{12-m}{10}\right]$ 及び

(C) $\left\{30(m-3) + \left[\frac{3m-7}{5}\right] + 59 + d - 1\right\}\left[\frac{m+7}{10}\right]$

の性質について

(B)、(C)は y年 1 月 1 日～ y年 m月 d日の日数を求める。

私たちは y年 1 月 1 日～ y年 m月 d日の日数を求める式を作るときにそれぞれの月の日数の周期性に着目した。しかし、2 月は 28(29) 日しかなく月の周期性から外れる。

(通常のツェラーの公式はこれを解消するために、年・月を変えて代入する。)

そこで私たちは(B) $m = 1,2$ のときと、

(C) $\mathrm{m} = 3{\sim}12$ のときに分けることにした。

このとき、求める日数が 1 月 2 月のとき(C)の計算式が不要なので、$m = 1,2$ のとき(C)$= 0$ となるように $\left[\frac{m+7}{10}\right]$ をかけている。また同様に、(B)には

$\left[\frac{12-m}{10}\right]$ をかけている。

(B) $\{31(m-1)+d-1\}\left[\frac{12-m}{10}\right]$ について

1 月 1 日～1 月 d日までの日数は $d-1$日

1 月 1 日～2 月 d日までの日数は $31+d-1$日

よって $\{31(m-1)+d-1\}\left[\frac{12-m}{10}\right]$ と表せる。

(C) $\left\{30(m-3)+\left[\frac{3m-7}{5}\right]+59+d-1\right\}\left[\frac{m+7}{10}\right]$ について

3 月～12 月の月の日数は、

（図１）

3月	30＋1日	4月	30日	5月	30＋1日	6月	30日
7月	30＋1日	8月	30＋1日	9月	30日	10月	30＋1日
11月	30日	12月	30＋1日				

となるため、3 月 1 日～ m月 1 日の日数は

（図２）

3月～m月までの日数							
m=3	30×0＋0日	m=4	30×1＋1日	m=5	30×2＋1日	m=6	30×3＋2日
m=7	30×4＋2日	m=8	30×5＋3日	m=9	30×6＋4日	m=10	30×7＋4日
m=11	30×8＋5日	m=12	30×9＋5日				

つまり、日数は

$$30(m-3)+n\ \ (0\leq n\leq 7)$$

と表せる。よって $m-3=x$ とすると

$$(x,n)=(0,0),(1,1),(2,1),(3,2),(4,2),$$
$$(5,3),(6,4),(7,4),(8,5),(9,5)$$

を通る関数が考えられれば良い。

これは、 $30(m-3)+\left[\frac{3m-7}{5}\right]$ と表せる。

また、m月 1 日～ m月 d日の日数は $d-1$日、

1 月と 2 月の日数の合計は 59 日のため

$\left\{30(m-3)+\left[\frac{3m-7}{5}\right]+59+d-1\right\}\left[\frac{m+7}{10}\right]$と

表せる。

(D) $\left[\frac{\left[\frac{1}{(y\ mod\ 4)+1}\right]-\left[\frac{1}{(y\ mod\ 100)+1}\right]+\left[\frac{1}{(y\ mod\ 400)+1}\right]+\left[\frac{m+7}{10}\right]}{2}\right]$について

この式は y年が閏年かつその年の 3 月以降の曜日を求めるときに $+1$ をする。

例えば、閏年でも 2 月 29 日を過ぎていなければ値は正しいが、3 月 1 日以降は 1 日分ずれてしまう。それを防ぐために、y年が閏年かつその年の 3 月以降の曜日を求めるときに $+1$ をする式が必要である。それが(D)の式である。(D)の式の $\left[\frac{1}{(y\ mod\ 4)+1}\right]-\left[\frac{1}{(y\ mod\ 100)+1}\right]+\left[\frac{1}{(y\ mod\ 400)+1}\right]$ は y年が閏年の条件を満たすとき 1 となり、満たさないときに０になる。 $\left[\frac{m+7}{10}\right]$ は m が 1 と 2 のとき 0 となり $3\leq m\leq 12$ のとき 1 となる。

以上より、y年が閏年かつ $3\leq m\leq 12$ のときのみ(D)は $\left[\frac{1+1}{2}\right]=1$、それ以外は $\left[\frac{1+0}{2}\right]=0$ または $\left[\frac{0+0}{2}\right]=0$ となり、条件を満たす。

ツェラーの公式（改）の検証

私たちはツェラーの公式（改）が正しいか検証した。

検証方法

Excel を用いて、通常のツェラーの公式とツェラーの公式(改)に y,m,d をそれぞれ 1 つずつ代入し算出した値が等しければ、ツェラーの公式(改)は正しい。(ただし、通常のツェラーの公式の有効範囲 1582 年 10 月 15 日～3999 年 12 月 31 日について検証した。)

検証結果

値は等しく、ツェラーの公式（改）は成り立っている。

（検証より一部抜粋）

2017	2	26	0	0	TRUE
2017	2	27	1	1	TRUE
2017	2	28	2	2	TRUE
2017	3	1	3	3	TRUE
2017	3	2	4	4	TRUE
2017	3	3	5	5	TRUE
2017	3	4	6	6	TRUE
2017	3	5	0	0	TRUE
2017	3	6	1	1	TRUE
2017	3	7	2	2	TRUE
2017	3	8	3	3	TRUE
2017	3	9	4	4	TRUE

参考資料

http:mathematics-pdf.com/pdf/zeller.pdf